

ANALIZA NAPONSKO-DEFORMACIONOG STANJA  
METODOM LINIJA KLIZANJA

Dipl.ing. Dragiša Ž. VILOTIĆ, asistent u  
naučnom radu Fakulteta tehničkih nauka  
Univerziteta u Novom Sadu

Uvod

Odredjivanje naponsko-deformacionog stanja predstavlja osnovni zadatak teorije elastičnosti i plastičnosti. Za rešavanje ovog problema primenjuje se čitav niz kako teorijskih tako i eksperimentalnih metoda. Neke od tih metoda su:

- metoda glavnih napona;
- metoda varijacija deformacione energije;
- metoda linija klizanja, i dr.

Svaka od ovih metoda primenljiva je za određene uslove i za rešavanje određenih zadataka.

U ovom radu biće prikazana metoda linija klizanja kako sa teorijskog stanovišta, tako i sa stanovišta praktične primene. Naime, ova metoda biće primenjena na analizu naponsko-deformacionog stanja za slučaj slobodnog sabijanja cilindra uz eksperimentalnu proveru rezultata.

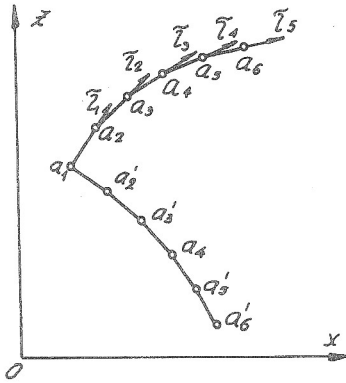
Ideja o linijama klizanja relativno je stara, i potiče još od 1871. godine, kada je M. Levy /3/ postavio funkcionalnu vezu između napona i brzina deformacije. Fundamentalni doprinos ovoj meto-

di dali su H. Hencky /1/ i L. Prandtl /1/, koji su praktično stvorili teoriju linija klizanja i dali rešenja naponsko-deformacionog stanja nekih problema. Originalna rešenja, na osnovu ove metode, dali su A.D. Tomljenov /1/, R. Hill /6/, W. Johnson /7/, E.M. Makušok /2/, V.V. Sokolovskij /3/, W. Prager /4/ i dr.

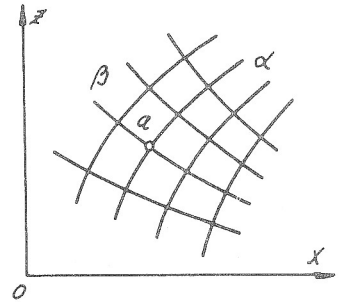
Do intenzivnijeg razvoja metode linija klizanja došlo je, u poslednje vreme, zbog njene praktične primene na konkretne tehnološke probleme.

### ELEMENTARNA TEORIJA LINIJA KLIZANJA

Uočimo tačku  $a_1$  u ravni  $xz$  tela u kome vlada ravno naponsko stanje (sl. 1.), i u toj tački nanesimo pravac glavnog tangencijalnog napona  $\tau_1$ . Krenimo pravcem vektora  $\tau_1$  do tačke  $a_2$ , koja se nalazi veoma blisko tački  $a_1$ , zatim u ovoj tački nanesimo pravac i veličinu glavnog tangencijalnog napona  $\tau_2$ . Vektor  $\tau_2$ , u opštem sluča-



Sl. 1.



Sl. 2.

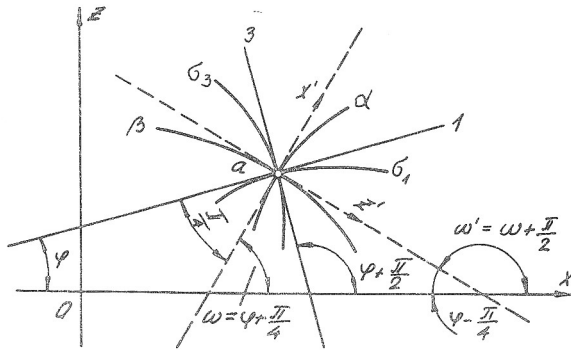
ju, se razlikuje od vektora  $\tau_1$ , i po pravcu, i po veličini. Nastavljajući ovu konstrukciju dobija se niz tačaka  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$

Vratimo se ponovo u tačku  $a_1$ . U njoj, pored glavnog tangencijalnog napona  $\tau_1$ , postoji i drugi tangencijalni napon koji je upravan na prethodni. Primenom prethodnog postupka dobija se niz tačaka  $a'_2, a'_3, a'_4, a'_5 \dots$

Spajanjem tačaka  $a_1, a_2, a_3 \dots$  i  $a'_1, a'_2, a'_3 \dots$  dobijaju se linije glavnih tangencijalnih napona, ili linije klizanja. Nastavljajući analognu konstrukciju iz tačaka  $a_2, a_3, a_4 \dots$  i  $a'_2, a'_3, a'_4 \dots$ , dobija se polje linija klizanja (sl. 2.), koje se sastoji iz dve familije krivih linija označenih sa  $\alpha$  i  $\beta$ .

Na osnovu prikazane konstrukcije polja linija klizanja može se zaključiti, da će različitim naponskim stanjima odgovarati različita polja linija klizanja, i da su linije klizanja familije  $\alpha$  i  $\beta$  uzajamno ortogonalne.

Sličnim postupkom može se konstruisati i polje glavnih normalnih napona, koje sa poljem linija klizanja zaklapa ugao od  $\pi/4$ . Na sl. 3. dati su pravci glavnih normalnih i tangencijalnih napona konstruisanih za tačku  $a$ .



Sl. 3.

Glavni normalni napon  $\sigma_1$ , zaklapa ugao  $\phi$  sa  $x$  osom, dok drugi normalni napon  $\sigma_2$ , zaklapa ugao  $\phi + \pi/2$  sa  $x$  osom. Ugao između tangente na liniju  $\alpha$  i  $x$  ose je  $\omega = \phi + \pi/4$ .

Sa sl. 3. sledi:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \omega \quad \text{duž linija } \alpha; \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{cot} \omega \quad \text{duž linije } \beta.$$

Jednačine (1) predstavljaju diferencijalne jednačine linija klizanja.

Za ravno naponsko stanje komponente napona u nekoj tački iznose:

$$\sigma_x = \sigma + \tau_{31} \cos 2\phi$$

$$\sigma_z = \sigma - \tau_{31} \cos 2\phi$$

$$\tau_{xz} = \tau_{31} \sin 2\phi$$

Zamenimo u gornje jednačine vrednost ugla  $\phi$  sa uglom  $\omega$  i, uzimajući u obzir da je pri plastičnoj deformaciji  $\tau_{31} = k$ , dobijamo:

$$\sigma_x = \sigma + k \sin 2\omega$$

$$\sigma_z = \sigma - k \sin 2\omega \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = -k \cos 2\omega$$

Jednačine ravnoteže za ravno naponsko stanje imaju sledeći oblik:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Zamenom komponenti napona iz jednačine (2), jednačine ravnoteže u ravni glavnih tangencijalnih napona glase:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2k(\cos 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2k(\cos 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} - \sin 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}) = 0$$

Ako sada početak koordinatnog sistema  $xoz$  premestimo u tačku  $\underline{a}$ , i to tako, da nove koordinatne ose  $x'$  i  $z'$  budu tangente linija klizanja  $\alpha$  i  $\beta$  (sl. 3.), jednačine (2) i (3) neće promeniti oblik.

U beskonačno maloj okolini tačke  $\underline{a}$  lukovi linija klizanja  $\alpha$  i  $\beta$  mogu se zameniti njihovim tangentama, koje se poklapaju sa novim osama  $x'$  i  $z'$ . Na taj način može se pisati da je:



$$dx = d\alpha; \quad dz = d\beta; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Ugao  $\omega$  sada je jednak nuli, pa diferencijalne jednačine ravnoteže dobijaju sledeći oblik:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\sigma + 2k\omega) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(\sigma - 2k\omega) = 0 \quad (4)$$

Integracijom diferencijalnih jednačina ravnoteže u lokalnom koordinatnom sistemu dobija se:

$$\sigma + 2k\omega = c_1$$

$$\sigma - 2k\omega = c_2$$

Gornje rešenje treba korigovati, jer je izvršena integracija parcijalnih diferencijalnih jednačina. Na taj način, rešenja diferencijalnih jednačina imaju oblik:

$$\sigma + 2k\omega = c_1 = 2k\eta(\beta) \quad \text{duž linije } \alpha \quad (5)$$

$$\sigma - 2k\omega = c_2 = 2k\xi(\alpha) \quad \text{duž linije } \beta$$

Pri tome, proizvoljne funkcije  $2k\eta(\beta)$  i  $2k\xi(\alpha)$  imaju konstantne vrednosti pri kretanju tačke uzduž jedne linije klizanja familije  $\alpha$  i  $\beta$ , a menjaju se prelaskom na drugu liniju klizanja.

Jednačine (5) poznate su kao Henkijev integral, ili integralne jednačine plastičnosti.

Ukoliko bi polje linija klizanja bilo poznato, to bi Hencky-ev integral predstavljao opšte rešenje ravanskog naponskog stanja.

Neka je u nekoj tački M, jedne linije klizanja, srednji napon  $\sigma = \sigma_M$  i ugao  $\omega = \omega_M$ . U tački N, iste linije klizanja, vlada srednji napon  $\sigma_N$ , a tangenta na liniju klizanja sa x osom zaklapa ugao  $\omega_N$ .

Primenjujući prvu jednačinu sistema (5) za tačke M i N, dobija se:

$$\sigma_M + 2k\omega_M = 2k\eta(\beta) \quad \text{i} \quad \sigma_N + 2k\omega_N = 2k\eta(\beta)$$

odnosno

$$\sigma_M + 2k\omega_M = \sigma_N + 2k\omega_N \quad (a)$$

Primenom druge jednačine sistema (5) dobija se:

$$\sigma_M - 2k\omega_M = \sigma_N - 2k\omega_N \quad (b)$$

Jednačine a) i b) daju sledeće:

$$\sigma_M - \sigma_N = \pm 2k(\omega_M - \omega_N) \quad (6)$$

Razlika uglova  $\omega_M - \omega_N = \omega_{MN}$  predstavlja ugao zakretanja linije klizanja pri prelazu iz tačke M u tačku N. Prema tome:

$$\sigma_M - \sigma_N = \pm 2k\omega_{MN} \quad (7)$$

Jednačina (7) pokazuje, da je promena srednjeg pritiska proporcionalna uglu zakretanja linije klizanja sa koeficijentom proporcionalnosti  $2k$ .

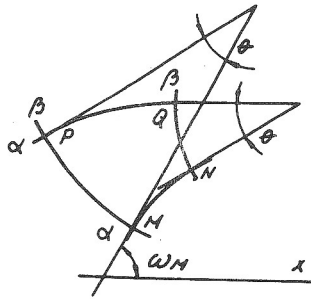
Jednačina (7) ima veliki praktični značaj. Ukoliko je poznato polje linija klizanja i srednji napon u jednoj tački polja (npr. iz graničnih uslova), moguće je na osnovu jednačine (7) odrediti veličinu srednjeg napona u ma kojoj tački polja, a uz pomoć jednačine (2) mogu se odrediti komponente napona  $\sigma_x, \sigma_z$  i  $\tau_{xz}$ . Na taj način je određeno naponsko stanje odgovarajućeg preseka tela.

Ako je polje linija klizanja sastavljeno iz pravih linija, u tom slučaju, nema promene ugla zakretanja pri kretanju duž linije klizanja. Na osnovu jednačine (7) sledi, da nema ni promene srednjeg napona. Takvo polje predstavlja polje jednorodnog naponskog stanja u kome vlada konstantan srednji napon.

#### OSOBI NE LINIJA KLIZANJA

Polje linija klizanja poseduje niz osobina, od kojih će neke biti ovde prikazane.

Uočimo elementarni četvorougao nik polja linija klizanja MNPQ (sl. 4.), koga čine dve linije familije  $\alpha$  i dve linije familije  $\beta$ .



Sl. 4.

Na osnovu jednačine (6) može se pisati da je:

$$\sigma_Q - \sigma_M = (\sigma_Q - \sigma_N) + (\sigma_N - \sigma_M) = 2k(\omega_Q + \omega_M - 2\omega_N)$$

a isto tako i:

$$\sigma_Q - \sigma_M = (\sigma_Q - \sigma_P) + (\sigma_P - \sigma_M) = 2k(\omega_P - \omega_Q - \omega_M)$$

iz ovih jednačina sledi:

$$\omega_Q - \omega_N = \omega_P - \omega_M = \theta$$

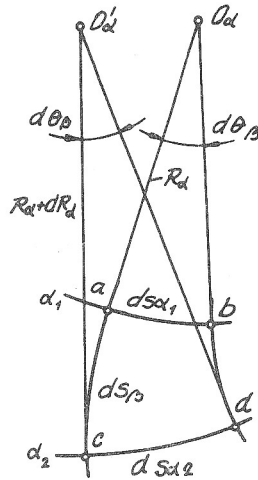
gde je ugao  $\theta$ , ugao između tangenti na linijama familije  $\alpha$  u tačkama preseka sa linijama familije  $\beta$ . Prema tome, ugao između tangenti na dvema linijama klizanja jedne familije u presečnim tačkama sa linijama klizanja druge familije je konstantan. Ovo je prva Hencky-eva teorema.

Druga Hencky-eva teorema glasi: pri kretanju tačke uduž linije klizanja jedne familije, veličina radijusa krivine druge familije linija klizanja menja se za veličinu predjenog rastojanja. Dokaz ove teoreme može se izvesti uz pomoć sl. 5.

Iz elementarnog četvorougona  $abcd$  sledi:

$$\widehat{ab} = dS_{\alpha_1} = R_{\alpha} d\theta_{\beta}$$

$$\widehat{cd} = dS_{\alpha_2} = (R_{\alpha} + dS_{\beta}) d\theta_{\beta}$$



Sl. 5.

S druge strane, pošto se krivina lukova sistema  $\alpha$  umanjuje pri prelazu sa linije  $\alpha_1$  na  $\alpha_2$ , možemo reći da će radijus krivine luka  $\widehat{cd}$  biti veći od radijusa krivine luka  $\widehat{ab}$  za neku veličinu  $dR_\alpha$ , tj:

$$O'_{\alpha}c = R_{\alpha} + dR_{\alpha}$$

dok je:

$$ds_{\alpha_2} = (R_{\alpha} + dR_{\alpha})d\theta_{\beta}$$

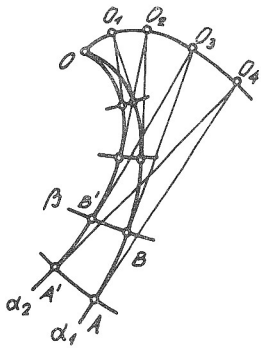
Izjednačavajući desne strane izraza za  $ds_{\alpha_2}$  dobija se:

$$dR_{\alpha} = ds_{\beta}$$

Analognim postupkom dobija se da je i:

$$dR_{\beta} = ds_{\alpha}$$

Ova teorema može se iskazati i u drugom obliku. Posmatrajmo dve bliske linije klizanja  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  (sl. 6.).



Sl. 6

U presečnim tačkama ovih linija sa linijama familije  $\beta$  povucimo tangente, koje određuju centre krivina elemenata linija familije  $\beta$  (tačke  $O, O_1, O_2 \dots$ ), radijus krivine  $AO_4$  ravan je zbiru radijusa krivine  $O_3B$  i dužine elementa  $AB$ . Slični zaključci mogu se doneti i za druge poluprečnike krivina.

Geometrijsko mesto centra krivina predstavlja evolventu linije klizanja  $\alpha_1$ .

Prema tome, centri krivina lukova jedne familije linija klizanja obrazuju evolventu druge familije linija klizanja. Ovo tvrdjenje poznato je pod imenom Prandtl-ova teorema.

Ova osobina linija klizanja može se iskoristiti za grafičku konstrukciju polja.

Linije klizanja izlaze na slobodnu ili na kontaktnu površinu tela. Na slobodnoj površini, a takodje i na kontaktnoj površini bez trenja, tangencijalni napon  $\tau_{xz} = 0$ . Iz treće jednačine sistema (2) sledi da je  $\cos 2\omega = 0$ , odnosno  $\omega = \pm \pi/4$ , tj. linije klizanja seku slobodnu, odnosno kontaktnu površinu pod uglom od  $\pi/4$ . Ukoliko na kontaktnim površinama trenje dostiže maksimalnu vrednost, tj.  $\tau_{xz} = k$ , tada je  $\cos 2\omega = 1$ , odnosno  $\omega = 0$  i  $\omega_1 = \pi/2$ , pa jedna familija linija klizanja polazi pod uglom od  $0^\circ$ , a druga pod uglom od  $90^\circ$  u odnosu na kontaktnu površinu.

Za druge vrednosti tangencijalnog napona na kontaktnim površinama  $0 \leq \tau \leq k$ , ugao linija klizanja uzima vrednosti  $\pi/4 \leq \omega \leq \pi/2$ ,  $\pi/4 \leq \omega \leq 0$ . Poznavajući vrednost tangencijalnog napona na kontaktnoj površini, može se odrediti tačna vrednost ugla  $\omega$  pomoću treće jednačine sistema (2).

### KARAKTERISTIKE

Da bi se iz diferencijalnih jednačina sistema (3) isključio srednji napon  $\sigma$ , potrebno je prvu jednačinu diferencirati po  $z$ , a drugu po  $x$ , a zatim ih sabrati. Rezultat toga je sledeća diferencijalna jednačina:

$$-\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 \cotg 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - 4 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \cotg 2\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad (8)$$

Gornja jednačina može se napisati u opštem obliku:

$$A \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} + C \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + F(x, z, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial z}) = 0 \quad (9)$$

Jednačina (9) je kvazilinearna diferencijalna jednačina drugog reda sa koeficijentima koji zavise od  $\omega$ . Ova jednačina ima beskonačno mnogo rešenja. Eliminacija rešenja postiže se pomoću graničnih uslova (problem Cauchy-ja). Postavljajući Cauchy-jev problem za jednačinu (8), dolazi se do sledećeg rešenja:

$$Adz^2 - 2Bdx dz + Cdx^2 = 0 \quad (10)$$

Jednačina (10) je karakteristična jednačina čija su rešenja karakteristike:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (11)$$

Iz jednačine karakteristika (11) moguća su tri slučaja:

$B^2 - AC < 0$ : jednačine karakteristika su kompleksne funkcije, a diferencijalna jednačina (9) je eliptična.

$B^2 - AC = 0$ : jednačine karakteristika određuju jednu familiju krivih linija, a diferencijalna jednačina (9) je parabolična.

$B^2 - AC > 0$ : jednačine karakteristika određuju dve familije krivih linija, a diferencijalna jednačina (9) je hiperbolična.

Unoseći u jednačinu (11) odgovarajuće vrednosti koeficijenata:

$$A=1, \quad B=\cotg 2\omega, \quad C=1$$

dobijaju se rešenja karakteristika:

$$\frac{dz}{dx} = \cotg 2\omega \pm \sqrt{\cotg^2 2\omega + 1} = \frac{\cos 2\omega \pm 1}{\sin 2\omega \sin 2\omega}$$

tj.

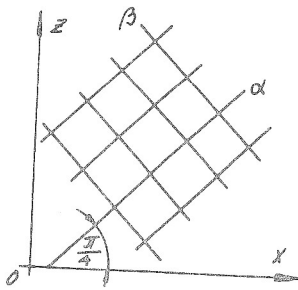
$$\frac{dz}{dx} = \tg \omega, \quad \frac{dz}{dx} = -\cotg \omega \quad (12)$$

Upoređujući jednačine karakteristika (12) sa jednačinama linija klizanja (1), zapaža se njihova potpuna identičnost. Prema tome, jednačine karakteristika se poklapaju sa jednačinama linija klizanja.

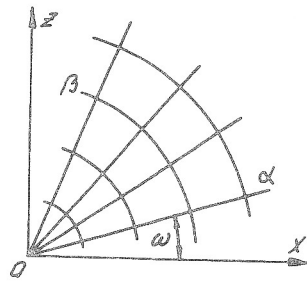
Ako je moguće naći rešenja karakteristika za određeni problem, onda je time određeno naponsko deformaciono stanje tela s obzirom na podudarnost karakteristika i linija klizanja.

### OBLICI POLJA LINIJA KLIZANJA

Najjednostavnije polje linija klizanja je ortogonalna mreža pravih linija koja, u slučaju slobodne površine ili granične površine bez trenja, izlazi pod uglom od  $45^\circ$ , (sl.7a.). Kako kod ovakvog polja nema promene ugla uzduž linija klizanja, to je srednji napon konstantan, i polje se naziva poljem jednorodnog naponskog stanja.



a)



b)

Sl. 7.

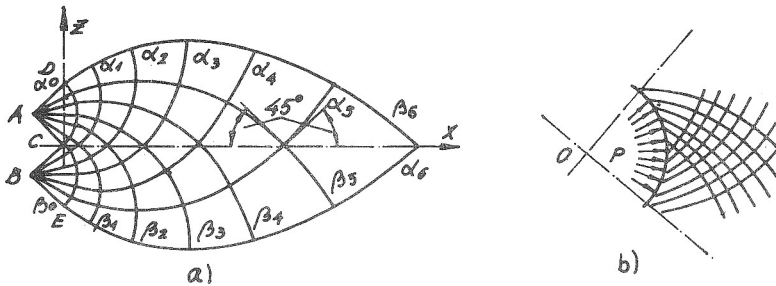
Na sl. 7b., prikazano je polje linija klizanja sastavljeno iz pravih linija (linije  $\alpha$ ) i kružnih lukova (linije familije  $\beta$ ). Uzduž jedne linije  $\alpha$  nema promene srednjeg napona. Međutim, idući po liniji  $\beta$ , zbog promene ugla  $\omega$ , imamo i promenu srednjeg napona  $\sigma$ . Na taj način, prelaskom sa jedne linije sistema  $\alpha$  na drugu, srednji napon se menja, ali je uzduž svake od ovih konstantan. Napon u tački O nije jedinstven, jer se u nju slivaju sve linije familije  $\alpha$  sa različitim srednjim naponima. Ova tačka naziva se polom

polja, a ovakvo polje nazvano je centriranim poljem linija klizanja.

Poseban slučaj centriranog polja je dvostruko centrirano lepezasto polje (sl. 8a) koje je obradio R. Hill /6/. Ovo polje se primenjuje za rešavanje različitih problema teorije plastičnosti.

U slučaju opterećenja cilindričnih površina bez trenja, polje linija klizanja je sastavljeno od logaritamskih krivih, koje izlaze na površinu pod uglom od  $45^{\circ}$  (sl. 8b).

Pored prikazanih tipova polja linija klizanja postoje i druga, koja su sastavljena od drugih krivih linija i njihovih kombinacija.



Sl. 8.

Pri formiranju polja linija klizanja treba imati u vidu, da polje linija klizanja karakteriše naponsko stanje tela, i da mora zadovoljiti granične uslove. Pri komponovanju polja iz više vrsta krivih linija, treba voditi računa, da na mestima njihovog spajanja ne sme biti diskontinuiteta.

#### PRIMERI PRIMENE LINIJA KLIZANJA

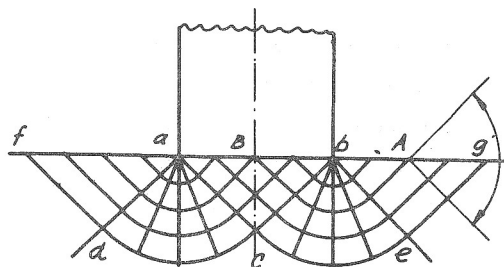
##### UTISKIVANJE ŽIGA U POLUBESKONAČNU PLASTIČNU SREDINU

Polje linija klizanja za slučaj utiskivanja žiga u polubeskonačnu plastičnu sredinu dato je na sl. 9., a odredio ga je Prandtl /3/. Prikazano polje linija klizanja određeno je za slučaj da na kontaktnoj površini nema trenja  $\tau_{xz} = 0$ . Polje linija klizanja, u ovom slučaju, je sastavljeno iz dvostruko centriranog polja (zona acd i bce) i polja jednorodnog naponskog stanja koje obuhvata oblasti abc, adf i beg.

U cilju određivanja srednjeg pritiska na kontaktnoj površini uočimo liniju AB koja izlazi na slobodnu površinu. Ugao zakretanja



$$\omega_{AB} = \pi/2.$$



Sl. 9.

Na slobodnoj površini  $\sigma_{zA} = 0$ . Iz jednačine plastičnosti za tačku A, sledi da je:

$$\sigma_{zA} - \sigma_{xA} = 2k_s \quad \text{tj.} \quad 0 - \sigma_{xA} = 2k_s, \quad \sigma_{xA} = -2k_s,$$

odnosno, srednji pritisak u tački A je:

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{xA} + \sigma_{zA}}{2} = -\frac{2k_s}{2} = -k_s$$

Primenjujući jednačinu (7) za tačke A i B, može se odrediti srednji napon u tački B. Pri tome, treba uzeti u obzir da je  $\sigma_A > \sigma_B$ , te desnu stranu jednačine (7) treba uzeti sa pozitivnim znakom:

$$\sigma_A - \sigma_B = 2k_s \omega_{AB}$$

$$\sigma_B = -k_s(1 + 2\omega_{AB})$$

Uzimajući u obzir uslov plastičnog tečenja za tačku B i relaciju za srednji napon:

$$\sigma_{xB} - \sigma_{zB} = 2k_s, \quad \sigma_B = \frac{\sigma_{xB} + \sigma_{zB}}{2}$$

dobija se vrednost napona  $\sigma_{zB}$ :

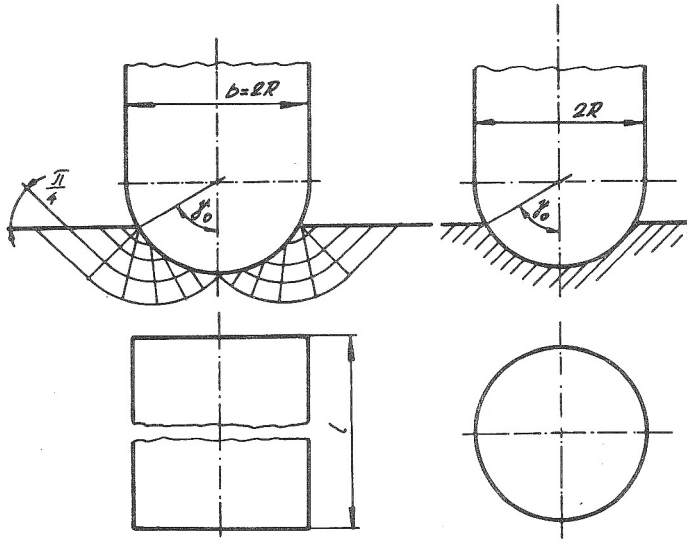
$$\sigma_{zB} = -2k_s(1+\omega_{AB}) = -2k_s\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

Ispod kontaktne površine vlada polje jednorodnog naponskog stanja, pa je napon u svim tačkama kontaktne površine isti. Prema tome, srednji pritisak na kontaktnoj površini iznosi:

$$p = 2k_s\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = k\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \approx 2,6k \quad (13)$$

$2k_s=k$  predstavlja specifični deformacioni otpor.

Polja linija klizanja za slučaj utiskivanja cilindričnog i sferičnog žiga u polubeskonačnu plastičnu sredinu bez uticaja trenja, obradio je A.D. Tomljenov /1/ (sl. 10.).



Sl. 10.

Polja linija klizanja, za ove slučajeve, dobijena su grafičkom konstrukcijom. Treba primetiti, da su veličine uglova zakretanja linija klizanja različite za razne tačke konture žiga.

Za slučaj utiskivanja žiga sa cilindričnim završetkom, analizom linija klizanja dobija se veličina srednjeg pritiska u obliku:

$$p = \frac{F}{A} = k \cdot \left[ \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma_0\right) - \cot \gamma_0 + \frac{1}{\sin \gamma_0} \right] \quad (14)$$

Povećanjem radijusa žiga R uz konstantnu širinu  $b = \text{const}$ , ugao  $\gamma_0$  se smanjuje, tako da se u graničnom prelazu dobija:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} p = k \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

što se slaže sa izrazom (13) za ravan žig.

Utiskivanje žiga sa cilindričnim vrhom predstavlja slučaj osnosimetričnog naponskog stanja. Medjutim, prema R. Hill-u /6/ i A. Ljušin-u /4/, i u slučaju osnosimetričnog naponskog stanja, može se primeniti metoda linija klizanja: Polje linija klizanja, za ovaj slučaj, je identično sa prethodnim.

Srednji pritisak za ovaj slučaj iznosi:

$$p = \frac{F}{A} = k \left[ \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma_0\right) \sin^2 \gamma_0 + \frac{2\gamma_0 - \sin 2\gamma_0}{4} \right] \quad (15)$$

(detaljnije o ovome dato je u literaturi /1/, /2/, /3/, /4/).

Pored navedenih primera, metoda linija klizanja primenjuje se za rešavanje drugih problema naponsko-deformacionog stanja u teoriji plastičnosti. Potvrda o primenljivosti ove metode može se dobiti jedino eksperimentalnim putem. Pri tome, treba vršiti upoređivanje parametara dobijenih metodom linija klizanja sa izmerenim vrednostima. Provera samog oblika polja linija klizanja može se izvršiti elektronagrizanjem uzoraka /2/, čime se dobija slika samog polja.

### SLOBODNO SABIJANJE CILINDRA

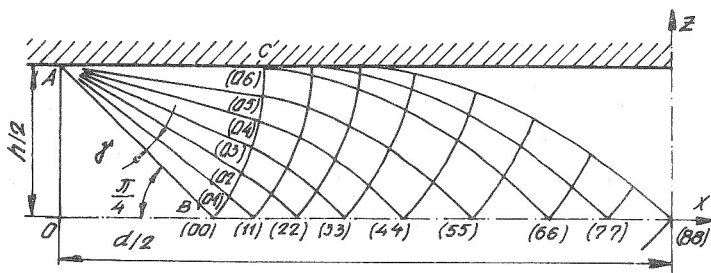
U ovom delu biće prikazani rezultati analize naponsko-deformacionog stanja kod slobodnog sabijanja cilindra metodom linija klizanja. Ovi rezultati biće upoređeni sa eksperimentalnim rezultatima.

Pri slobodnom sabijanju cilindra vlada osnosimetrično naponsko stanje, te se prema R. Hill-u /6/ može primeniti metoda linija klizanja za analizu naponsko-deformacionog stanja.

U cilju odredjivanja naponsko-deformacionog stanja pri slobodnom sabijanju cilindra, usvojeno je dvostruko centrirano lepezasto

polje linija klizanja kao jedino moguće (sl. 11.).

Na slici je prikazana samo jedna četvrtina ovog polja, dok os-



Sl. 11.

tali delovi zbog simetrije nisu dati. Polje se sastoji iz dela OAB u kome vlada jednorodno naponsko stanje. Zona ABC obuhvaćena je centriranim poljem linija klizanja, koje se sastoji iz pravih linija familije  $\alpha$ , i kružnih lukova familije  $\beta$ . Na centrirano polje se ne stavlja cikloidno polje linija klizanja. Polje je konstruisano za slučaj da na kontaktnoj površini vlada maksimalni tangencijalni napon.

Presečene tačke linija  $\alpha$  i  $\beta$  su obeležene parovima brojeva  $(m, n)$ , pri čemu  $\underline{m}$  određuje redni broj linija  $\alpha$ , a  $\underline{n}$  redni broj linija  $\beta$ .

U polju jednorodnog naponskog stanja, koje u ovom slučaju izlazi na slobodnu površinu, nema tangencijalnih napona, pa je srednja vrednost napona  $\sigma = -k/2$ . Isti napon vlada i u tački (00), pa je prema tome  $\sigma_{00} = -k/2$ .

U tački (00) ugao  $\omega_{00} = \pi/4$ . Za svaku drugu tačku polja ugao  $\omega$  može se odrediti pomoću izraza:

$$\omega_{mn} = \omega_{00} + (n - m)\gamma \quad (16)$$

gde je  $\gamma$  ugao podele kružnog luka BC.

Slično tome, srednji napon ma koje tačke polja može se odrediti na osnovu sledeće formule:

$$\sigma_{mn} = \sigma_{00} - k(m+n)\gamma \quad (17)$$

Primenom jednačine (2) mogu se odrediti komponente napona  $\sigma_x, \sigma_z$

i  $\tau_{xz}$ .

### REZULTATI EKSPERIMENTA

Za analizu naponsko-deformacionog stanja slobodnog sabijanja cilindra, uzet je izvod rezultata jednog šireg plana eksperimenta.

Za eksperiment je korišćen šipkasti materijal od Č.4320, prečnika  $\phi$  30,5 mm. Iz šipke su isečeni uzorci i poravnati na visinu ravnu prečniku, tj.  $h/d=1$ . Zatim su uzorci razvrstani u četiri grupe, da bi bila izvršena njihova termička obrada na sledeći način:

- grupu A predstavljaju uzorci sa strukturom u stanju isporuke,
- grupu B čine uzorci koji su normalizovani na temperaturi od  $860^{\circ}\text{C}$ ,

grupu C čine uzorci kod kojih je, posle normalizacije, izvršeno žarenje na temperaturi od  $670^{\circ}$  u vremenu od 3 časa,

- grupu D čine uzorci kod kojih je, posle normalizacije, izvršeno žarenje na temperaturi od  $670^{\circ}$  u vremenu od 6 časova,

Posle termičke obrade izvršeno je fosfatiranje uzoraka u fabrici mašina "Morava" iz Požarevca.

U toku eksperimenta korišćena su dva sredstva za podmazivanje:

- I - mašinsko ulje
- II - molinkot.

Slobodno sabijanje obradaka vršeno je na hidrauličnoj presi "MAN" od 600 Mp, sa tri stepena deformacije:

$$\alpha = 0,7$$

$$\beta = 0,9$$

$$\gamma = 1,1$$

Registrowanje hoda stola i pritiska u cilindru prese, vršeno je kontinualno u toku procesa, uz pomoć davača i elektronskog pisača.

Svaki eksperiment je ponavljan tri puta pod istim uslovima.

U tabeli T-1 date su srednje vrednosti deformacione sile kao rezultat navedenog eksperimenta.

Strukt. stanje	$F_I$  Mp			$F_{II}$  Mp		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
A	121,4	155,1	203,7	123,0	159,0	203,3
B	134,3	165,3	223,4	134,0	168,4	217,8
C	129,3	163,7	215,4	122,2	162,9	200,5
D	123,8	164,5	224,5	123,8	166,1	211,5

T-1

Geometrijske karakteristike uzoraka posle izvršenog sabijanja date su u tabeli T-2:

$\emptyset$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
h mm	15,7	12,7	10,3
d mm	42,4	47,3	52,5
$\emptyset_{st}$	0,66	0,88	1,09
A mm <sup>2</sup>	1414	1753	2164

T-2

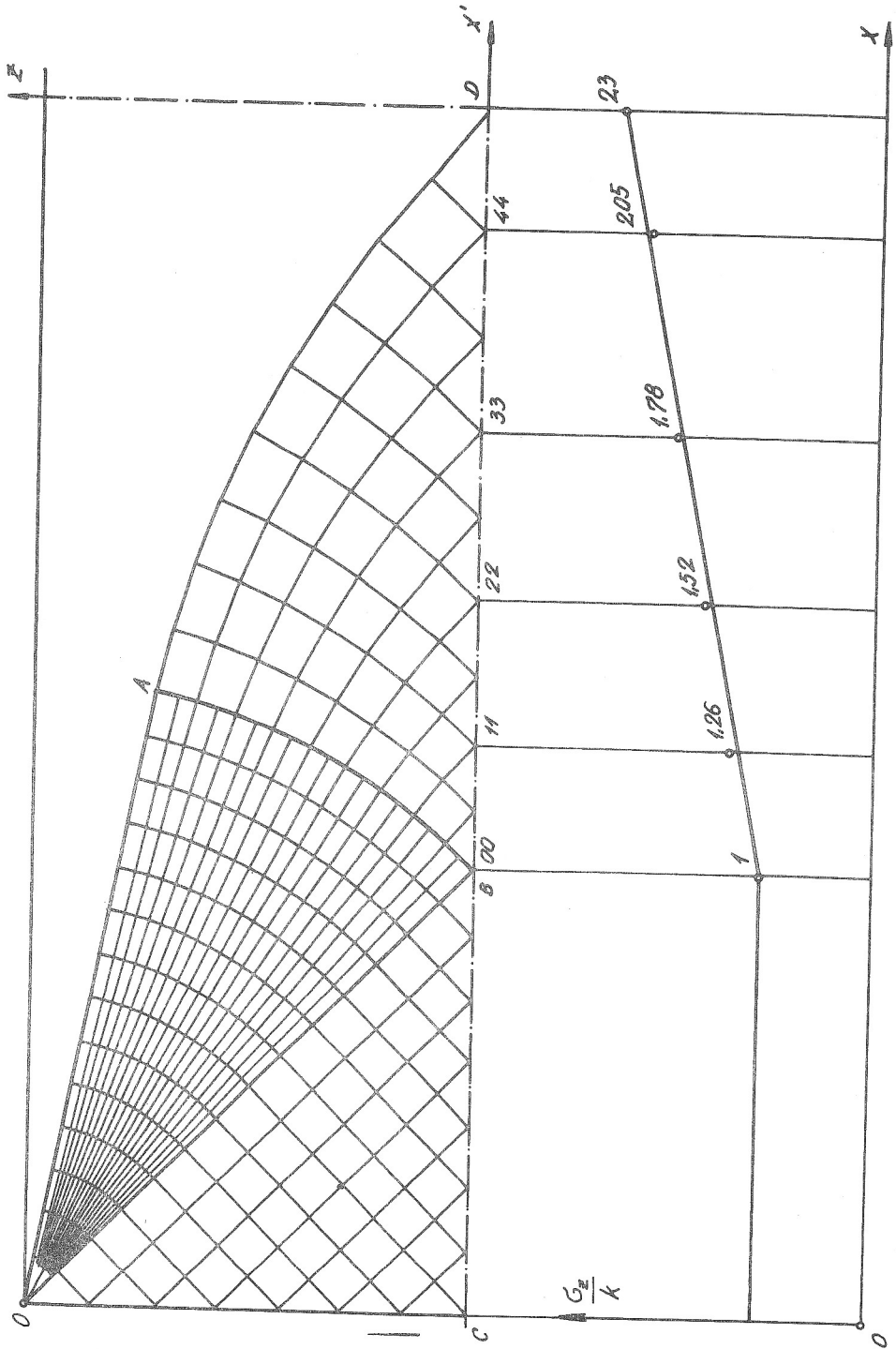
Podaci za h i d predstavljaju srednje vrednosti visina i prečnika sabijenih uzoraka.

#### KONSTRUKCIJA POLJA LINIJA KLIZANJA

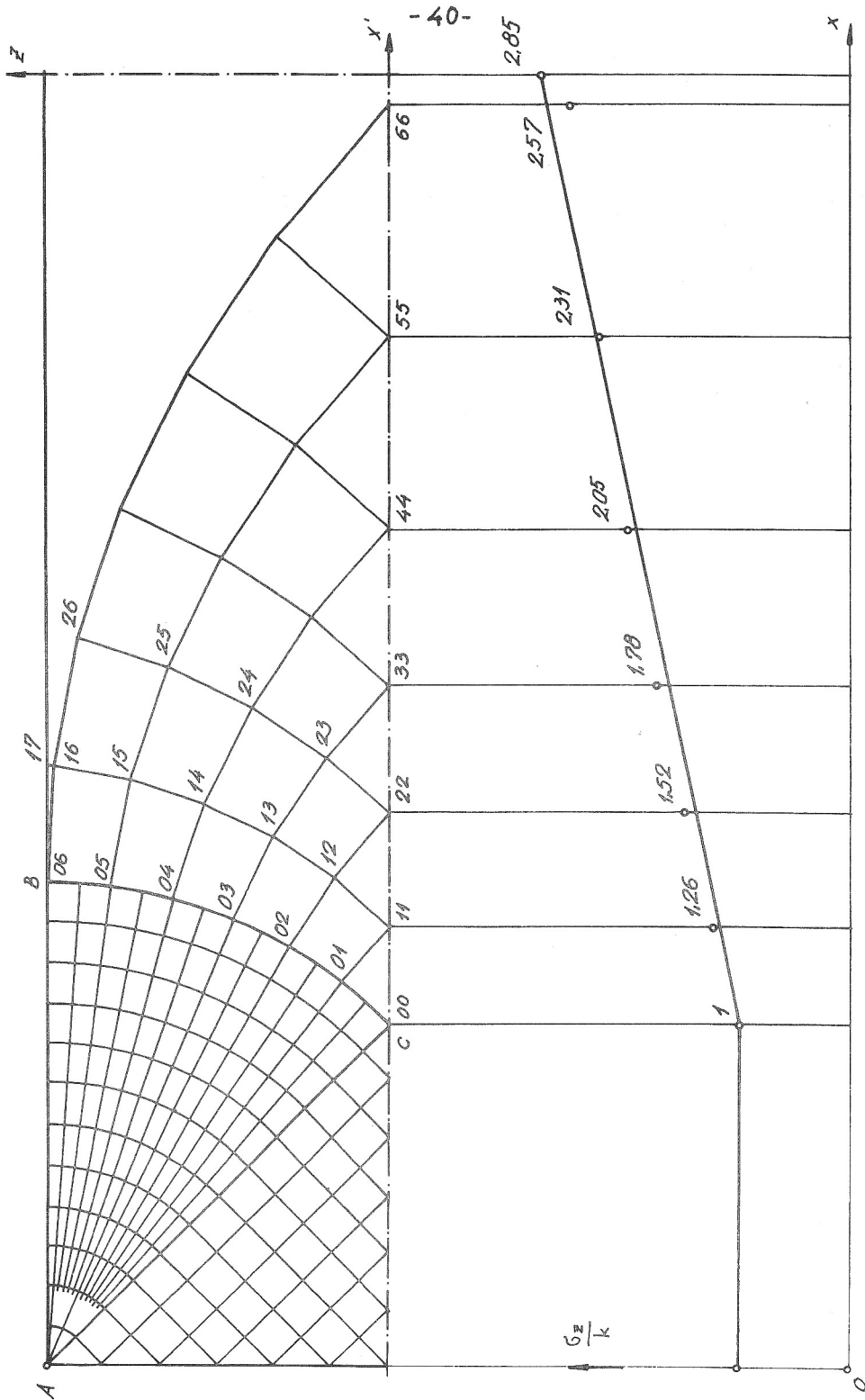
Za geometrijske odnose uzoraka iz tabele T-2, grafičkim putem su određena polja linija klizanja i prikazana na slikama 12., 13. i 14.

Konstrukcija polja linija klizanja biće objašnjena za slučaj sabijanja cilindra sa stepenom deformacije  $\gamma=1,1$  (sl. 14.), a analognim postupkom su konstruisana polja linija klizanja za druga dva stepena deformaicje.

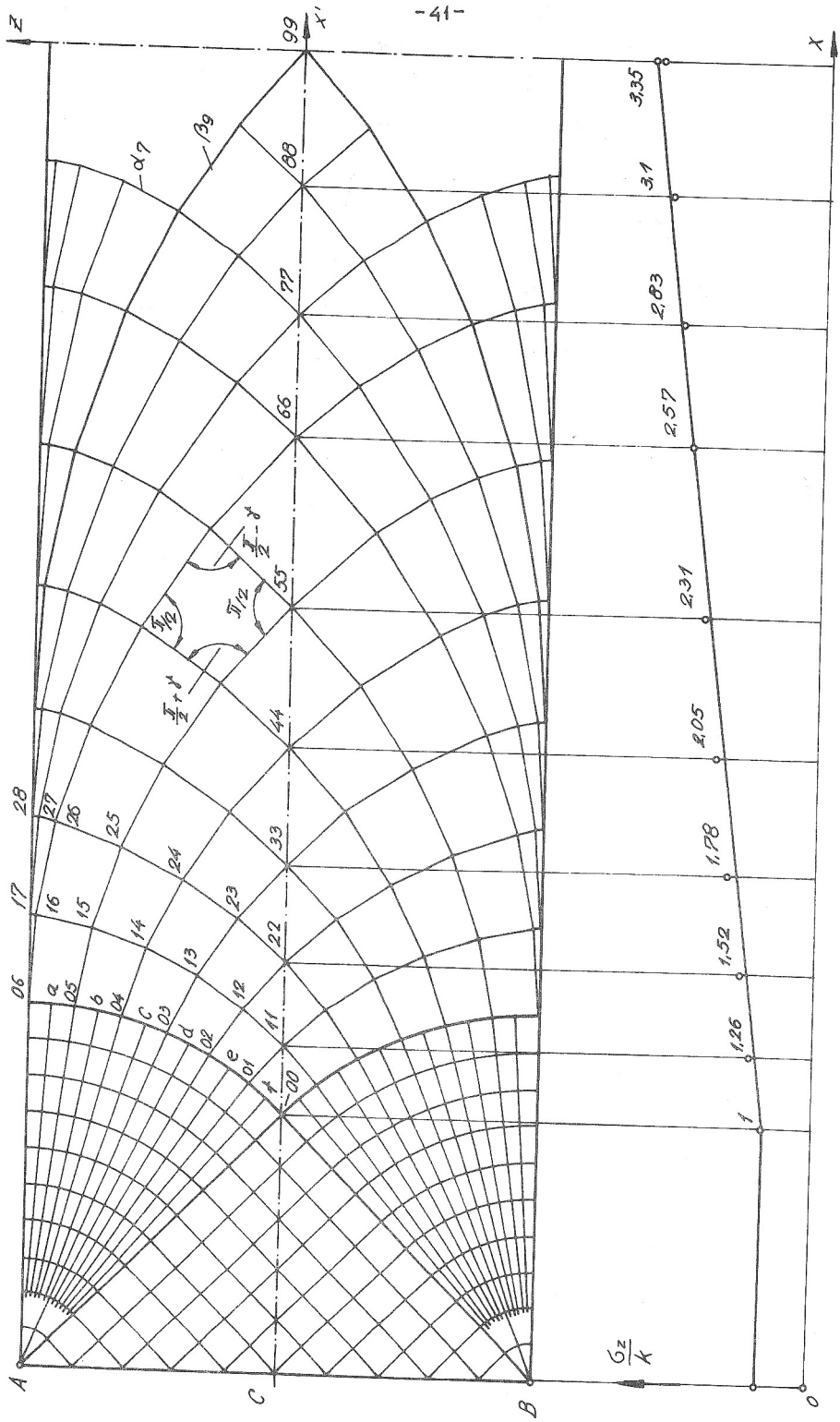
U odgovarajućoj razmeri je nacrtana leva polovina konture obratka, čije su dimenzije  $\phi = 52,5 \times 10,3$  mm. U tačkama A i B povučene su prave pod  $45^\circ$  do preseka sa x osom, te je dobijena tačka (00). Daljnje objašnjenje, zbog simetrije, odnosi se na gornju polovinu



SL. 12.







SL. 14.

prikazanog polja. Iz tačke (00) opisan je kružni luk i dobijena tačka (06). Dalje je kružni luk izdelfjen na šest jednakih delova (ugao podele  $\gamma=7,5^{\circ}$ ). Na taj način su dobijene tačke 01, 02, 03... .. 05. Zatim su lukovi izmedju ovih tačaka izdelfjeni na dva jednaka dela, te su tako nastale tačke a, b, c, d, e, f. Ovim je završena priprema za konstrukciju polja linija klizanja u oblasti 00, 06, 99.

Da bi se odbila prva linija familije  $\alpha$  u zoni 00, 06, 99 potrebno je uraditi sledeće: iz tačke (06) povuče se prava pod uglom od  $\gamma/2$  u odnosu na konturu, tj. paralelno sa linijom Aa, zatim se iz tačke (05) povuče prava paralelna sa Ab, a iz tačke (04) prava paralelna sa Ac itd. Sve ove novopovučene prave zahvataju ugao od  $\gamma/2$  sa potezima iz tačke A. Prava povučena iz tačke (01) paralelna sa Af, preseca osu simetrije  $x'$  u tački (11). Iz tačke (11) povlači se normala na pravac 01-11 i dobija se tačka (12). Sada se iz tačke (12) povlači normala na duž 02-12 i dobija se tačka (13) itd., sve do tačke (17). Iz tačke (17) povlači se sada prava paralelna sa Aa, iz tačke (16) povlači se prava paralelna sa Ab i postupak se tako nastavlja potpuno analogno kao u prvom slučaju, sve dok se ne prekrije cela oblast linijama klizanja. Valja primetiti, da linije klizanja u presečnim tačkama familije  $\alpha$  i  $\beta$  zaokreću za ugao  $\gamma$ , i da je mreža linija klizanja sastavljena od četvorougona čija su dva naspramna ugla po  $90^{\circ}$ , dok druga dva iznose  $90^{\circ}-\gamma$  i  $90^{\circ}+\gamma$ . Ovo je mali nedostatak grafičke konstrukcije polja linija klizanja, koji se umanjuje sa smanjenjem ugla podele  $\gamma$ .

Linija klizanja familije  $\beta$  koja prolazi kroz centar obratka, predstavlja graničnu liniju koja razdvaja plastičnu oblast od krute zone. U ovom slučaju to je linija  $\beta_0$ , iznad koje je kruta zona, koja se kreće kao kruto telo.

Donja polovina polja linija klizanja dobijena je analognim postupkom. Na isti način su konstruisana polja linija klizanja za stepene deformacije  $\alpha$  i  $\beta$ , s tim što je ovde prikazana samo jedna četvrtina polja. Kod stepena deformacije  $\alpha$ , ugao podele je dva puta manji nego kod druga dva polja, iz prostoga razloga, što krupnija podela ne daje graničnu liniju.

Primenom jednačina (16) i (17) i sistema jednačina (2), moguće je odrediti napone u ma kojoj tački polja linija klizanja. Na osnovu poznatih napona mogu se odrediti deformacije, čime je u pot-

punosti određeno naponsko-deformaciono stanje tela.

U tabeli T-3 date su vrednosti napona u pojedinim tačkama polja duž ose  $x'$  u funkciji specifičnog deformacionog otpora  $k$ . U ostalim tačkama polja naponi nisu određivani (jer bi to zauzelo dosta prostora), a raspodela napona duž ose  $x'$  služi za određivanje deformacione sile po ovoj metodi. Tabela je uradjena za ugao  $\gamma=7,5^\circ$  tako da kod polja linija klizanja sa stepenom deformacija  $\alpha$  treba uzeti svaku drugu tačku.

Tačka	$\omega^\circ$	$\sigma$	$\sigma_x$	$\sigma_z$	$\tau_{xz}$
00	45	$-k/2$	0	$k$	0
11	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{\pi}{6})=-0,76k$	$-0,26k$	$-1,26k$	0
22	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{\pi}{3})=-1,025k$	$-0,525k$	$-1,52k$	0
33	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{\pi}{2})=-1,285k$	$-0,785k$	$-1,785k$	0
44	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{2}{3}\pi)=-1,55k$	$-1,05k$	$-2,05k$	0
55	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{5}{6}\pi)=-1,81k$	$-1,31k$	$-2,21k$	0
66	45	$-\frac{k}{2}(1+\pi)=-2,07k$	$-1,57k$	$-2,57k$	0
77	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{7}{6}\pi)=-2,335k$	$-1,83k$	$-2,83k$	0
88	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{4}{3}\pi)=-2,60k$	$-2,10k$	$-3,10k$	0
99	45	$-\frac{k}{2}(1+\frac{3}{2}\pi)=-2,85k$	$-2,35k$	$-3,35k$	0

T-3

Iz tabele se vidi da je tangencijalni napon duž ose  $x'$  ravan nuli, što je i logično, jer linije klizanja seku ovu osu pod uglom od  $45^\circ$ .

Na bazi podataka iz tabele T-3 nacrtani su dijagrami promene napona  $\sigma_z$  duž ose  $x'$ . Usvajajući linearnu promenu napona  $\sigma_z$  moguće je jednostavno odrediti vrednost deformacione sile:

$$F = \int_A \sigma_z dA \quad (18)$$

Rešenje integrala (18) predstavlja zapreminu tela koje se do-

bija obrtanjem dijagrama  $\sigma_z$  oko z ose.

Uzimajući u obzir geometrijske veličine kao i vrednosti funkcije  $\sigma_z$ , nadjena su rešenja integrala (18) za pojedine stepene deformacije u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= 1656,6 \text{ k} && \text{Za stepen deformacije } \alpha \\ F_\beta &= 2331,8 \text{ k} && \text{za stepen deformacije } \beta \quad (19) \\ F_\gamma &= 3258,7 \text{ k} && \text{za stepen deformacije } \gamma \end{aligned}$$

Specifični deformacioni otpor određen je iz eksperimentalnih rezultata za deformacionu silu. Naime, izraz za deformacionu silu dobijen iz uslova ravnoteže /5/ glasi:

$$F = kA\left(1 + \frac{\mu}{3} \frac{d}{h}\right) \quad (20)$$

Usvajajući koeficijent trenja  $\mu=0,1$  i uz pomoć podataka iz tabele T-1 i T-2 a na bazi jednačine (20), određene su vrednosti specifičnog deformacionog otpora za sva tri stepena deformacije, za sva strukturna stanja i oba sredstva za podmazivanje. Rezultati su svrstani u tabeli T-4.

Strukt. stanje	$k_I \text{  kp/mm}^2\text{  }$			$k_{II} \text{  kp/mm}^2\text{  }$		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
A	78,9	78,6	80,4	80,0	80,6	80,3
B	87,3	83,7	88,2	87,1	85,3	85,9
C	84,0	82,9	85,1	79,5	82,5	79,2
D	80,5	83,3	88,6	70,5	84,1	83,5

T-4

Primenjujući izraze (19) i vrednosti specifičnog deformacionog otpora iz tabele T-4, izračunate su vrednosti deformacione sile kao rezultat metode linija klizanja. Ove vrednosti su svrstane u tabelu T-5.

Strukt. stanje	$F_{ILK}  MP $			$F_{IILK}  MP $		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
A	130,7	183,3	262,0	132,5	187,9	261,7
B	144,6	195,2	287,4	144,3	198,9	279,9
C	139,2	193,3	277,3	131,7	193,4	258,1
D	133,4	194,2	288,7	133,4	196,1	272,1

T-5

Na bazi izmerenih vrednosti deformacione sile, tabela T-1 i vrednosti dobijenih metodom linija klizanja, tabela T-5, može se odrediti relativna greška metode. U tabeli T-6 prikazana su procentualna odstupanja deformacione sile dobijene metodom linija klizanja od izmerenih vrednosti.

Strukt. stanja	$\epsilon_I  %$			$\epsilon_{II}  %$		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
A	7,66	18,18	28,62	7,72	18,17	28,73
B	7,69	18,08	28,65	7,68	18,11	28,51
C	7,65	18,08	28,73	7,77	18,10	28,73
D	7,75	18,05	28,59	7,75	18,06	28,65

T-6

Minimalna greška  $\epsilon_{\min} = 7,65\%$ .

Maksimalna greška  $\epsilon_{\max} = 28,73\%$ .

### ZAKLJUČAK

Na osnovu eksperimentalnih rezultata i vrednosti dobijenih metodom linija klizanja, može se zaključiti da je moguća primena ove metode na analizu osnosimetričnog naponskog stanja, konkretno, na slobodno sabijanje cilindra. Više vrednosti deformacione sile, dobijene linijama klizanja, su svakako i posledica uslova za koje su polja konstruisana (maksimalno trenje na kontaktnim površinama obratka i alata), dok je eksperiment izvodjen sa glatkim površinama alata uz upotrebu mazivnog sredstva. Drugo, vrednosti specifičnog deformacionog otpora nisu sasvim pouzdane, jer su dobijene računskim putem iz izmerenih vrednosti deformacione sile. Porast odstupanja deformacionih sila sa porastom stepena deformacije je logičan, ako se ima u vidu karakter polja linija klizanja, koje se jako izdužuje sa povećanjem prečnika obratka.

Na osnovu ove analize može se reći, da metoda linija klizanja ima veliki značaj za analizu naponsko-deformacionog stanja, kako ravnanskih, tako i osnosimetričnih problema teorije plastičnosti. Još ako se ima u vidu, da je polje linija klizanja u tesnoj vezi sa poljem brzina (poblje brzina je potpuno identično sa poljem linija klizanja zaokrenutim za  $180^{\circ}$ ), onda se dobija prava sklika o vrednosti ove metode.

Nedostaci metode linija klizanja bili bi u tome, što ona karakteristike materijala obuhvata jednim jedinim faktorom, specifičnim deformacionim otporom. Dalje, rešenja polja linija klizanja nisu jednoznačno odredjena i umnogome zavise od umešnosti autora i od njegovog poznavanja dotičnog problema. Linije klizanja često se crtaju intuitivno, i pri tome se jedino mora voditi računa o uslovima koje ova polja moraju ispuniti, npr. granični uslovi na slobodnim i kontaktnim površinama itd. Dakle, polja linija klizanja predstavljaju, u neku ruku, čisto geometrijske karakteristike posmatranog problema. Povoljno je i to što se ove linije mogu izazvati i videti uz pomoć elektronagrizanja, što u ovom eksperimentu nije izvršeno, zbog nedostatka tehničkih sredstava.

L i t e r a t u r a

- /1/ TOMLJENOV, A.D., Teorija plastičeskogo deformirovanija metalov, Moskva, 1972.
- /2/ MAKUŠOK, E.M., MAUTSEVIČ, A.S., SEVERDENKO, V.P., SEGAL, V.M., Teoritičeskije osnovi kovki i gorjačej obemnoj šampvki, Minsk, 1968.
- /3/ STROŽEV, M.V., POPOV, E.A., Teorija obrabotki metalov davljenijem, Moskva, 1971.
- /4/ MUSAFIA, Dr Binko, Primjenjena teorija plastičnosti, I i II deo, Sarajevo, 1974.
- /5/ VUJOVIĆ, Vlado, Obrada metala deformacijom, I deo, Novi Sad, 1972.
- /6/ HILL, R., The Mathematical Teory of Plastificity, Oxford, 1971.
- /7/ JOHNSON, W., MELIOR, P.B., Plasticity for Mechanical Engineers, D.Van Nostrand Company LTD, Toronto, 1962.
- /8/ SMIRNOV, V.I., Kurs visšej matematiki, tom I, II, III i IV, Moskva, 1974.

VILOTIĆ, Ž.D.

ANALIZA NAPONSKO-DEFORMACIONOG STANJA METODOM LINIJA

KLIZANJA

R e z i m e

Metoda linija klizanja predstavlja jedan od pristupa za određivanje naponsko-deformacionog stanja ravanskih i nekih osno-simetričnih problema. Ovim radom je obuhvaćena teorijska analiza problema linija klizanja, a zatim je prikazano nekoliko istorijskih primera primene ove metode, na rešavanje konkretnih problema teorije plastičnosti. Na kraju je data primena metoda linija klizanja, na slučaj slobodnog sabijanja cilindra, uz eksperimentalnu potvrdu rezultata.

ANALYSE DES ZUSTANDES SPANNUNG-DEFORMATION MIT DER

GLEITLINIENMETHODE

Z u s a m m e n f a s s u n g

Die Bestimmung des Spannung-Deformation Zustandes bei ebenen und axial-symmetrischen Problemen ist auch mit Hilfe der Gleitlinienmethode möglich. Diese Arbeit beinhaltet theoretische Analyse des Gleitlinienproblems. Außerdem sind einige Beispiele der Anwendung dieser Methode dargestellt durch welche die konkrete Probleme der Plastizität-Theorie zu lösen sind. Anschließend ist Anwendung der Gleitlinienmethode am Beispiel eines frei gestauchten Zylinders gezeigt. Die Ergebnisse wurden experimentell bestätigt.