

PRIOLOG ISTRAŽIVANJU STABILNOSTI PROCESA  
RAZVLAČENJA CILINDRIČNIH TANKOZIDNIH  
ELEMENATA U PLASTIČNOM STANJU

Mr Stevan ŽIVANOVIĆ, dipl.ing., vanr. profesor  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Banjaluci

1. Uvod

Proces razvlačenja cilindričnih tankozidnih elemenata karakteriše dvoosno zatezno naponsko stanje, tako da ovaj proces zauzima na krugu plastičnosti /4/ mjesto između procesa proširivanja i izvlačenja. Odnos meridijanskog i obimnog napona zavisi od vrste opterećenja, i može se kretati od nule do beskonačnosti /5/. Za ovakva naponska stanja obimne i meridijanske deformacije mogu biti pozitivne ili negativne, ali jedna uvijek pozitivna, a debljinska deformacija je uvijek negativna, što znači da u čitavom razmatranom području dolazi do smanjenja prvobitne debljine zida zatezanog elementa. Suma svih deformacija mora biti jednaka nuli obzirom na zakon nestišljivosti u procesima preoblikovanja deformisanjem.

Smanjenje debljine zida razvlačenog elementa može dovesti do gubitka stabilnosti, kome prethodi sužavanje ili ispupčavanje,

tj. smanjenje ili povećavanje prečnika cilindričnog elementa, zavisno od vrste i intenzivnosti opterećenja.

U cilju analize pojave gubitka stabilnosti neophodno je, obzirom da se radi o plastičnom području, poći od međuzavisnosti komponenti tenzora priraštaja deformacija i normalnih komponenti tenzora naponskog devijatora.

U oblasti plastičnih deformacija glavne ose napona poklapaju se sa glavnim osama brzine deformacije, iz čega slijedi da su naponski devijator i devijator tenzora brzine deformacije slični i koaksijalni /3/. Zamjenom komponenti brzine deformacije komponentama priraštaja plastičnih deformacija, što može biti obrazloženo njihovom sličnošću, dolazi se do uslova proporcionalnosti istonazivnih komponenti priraštaja plastičnih deformacija  $d\varphi$  i komponenti naponskog devijatora  $S$  /1/

$$\frac{d\varphi_1}{s_1} = \frac{d\varphi_2}{s_2} = \frac{d\varphi_3}{s_3} = \frac{3}{2} \frac{d\varphi_i}{\sigma_p} \quad (1)$$

gdje je  $d\varphi_i$  priraštaj intenzivnosti deformacije, pri čemu postoji zavisnost

$$d\varphi_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2}$$

Za dvoosno naponsko stanje uslov proporcionalnosti (1) prelazi u zakon plastičnog tečenja /2/

$$\frac{d\varphi_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varphi_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{d\varphi_3}{-\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varphi_i}{2\sigma_p} \quad (2)$$

u kome su komponente naponskog devijatora izražene preko glavnih napona /2/, tj.

$$s_1 = \frac{2}{3} \sigma_1 - \frac{1}{3} \sigma_2 \quad (3)$$

$$s_2 = \frac{2}{3} \sigma_2 - \frac{1}{3} \sigma_1 \quad (4)$$

$$s_3 = -\frac{1}{3} \sigma_1 - \frac{1}{3} \sigma_2 \quad (5)$$

Preko zakona plastičnog tečenja uspostavlja se veza između priraštaja deformacija i glavnih napona, što omogućuje interpretaciju problema stabilnosti procesa u oktaedarskoj ravni preko intenziteta deformacije, uz prethodno poznavanje vrste i intenziteta opterećenja.

## 2. Stabilnost procesa razvlačenja cilindričnog elementa u plastičnom stanju aksijalnom silom

Shematski prikaz razvlačenja cilindričnog elementa aksijalnom silom dat je na sl.1 i sl.2. Početni položaj ovog procesa lociran je na krugu plastičnosti u tački "C" (sl.5). Zatim pod djelovanjem opterećenja proces se pomjera ka tački "N", gdje stiže u trenutku kada dolazi do kočenja procesa sužavanja, koji prati premještanje procesa iz tačke "C" ka tački "N". Do kočenja dolazi s obzirom da je u tački "N" obimna deformacija  $\varphi_1 = 0$ .

U tački "N" vlada dvoosno zatezno naponsko stanje

$$\sigma_2 = 2\sigma_1 \quad (6)$$

Napon  $\sigma_2$  definisan je preko opterećenja  $F$ , prečnika cilindričnog elementa  $D$  i debljine njegovog zida  $s$ , tj.

$$\sigma_2 = \frac{F}{\pi D s} \quad (7)$$

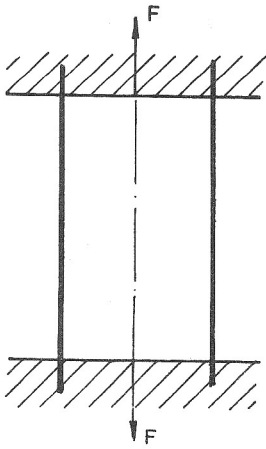
znači

$$\sigma_1 = \frac{F}{2\pi D s} \quad (8)$$

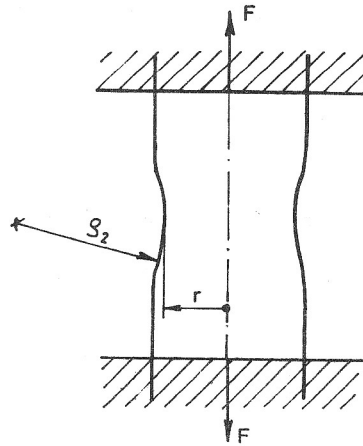
U cilju uspostavljanja veze između priraštaja deformacija, neophodnih za konkretizaciju zakona plastičnog tečenja, i priraštaja glavnih napona treba naći diferencijale glavnih napona u funkciji dvije promjenljive veličine  $D$  i  $s$ , tako da će biti

$$d\sigma_2 = \frac{-\frac{F}{\pi s} dD}{D^2} + \frac{-\frac{F}{\pi D} ds}{s^2}$$

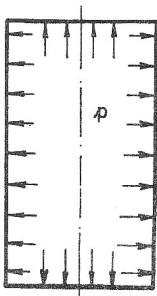
$$d\sigma_2 = -\frac{F}{\pi D s} \left( \frac{dD}{D} + \frac{ds}{s} \right) \quad (9)$$



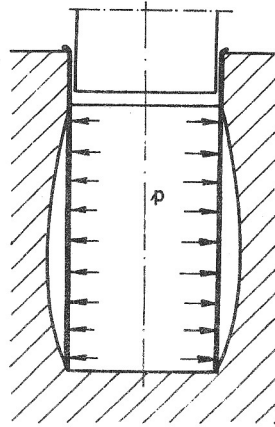
Sl.1. Shematski prikaz aksijalnog zatezanja cilindričnog elementa



Sl.2. Prikaz pojave sužavanja u procesu aksijalnog zatezanja cilindričnog elementa



Sl.3. Opterećenje cilindrične posude unutrašnjim pritiskom



Sl.4. Opterećenje cilindričnog elementa unutrašnjim pritiskom

Imajući u vidu jednakost (7) možemo napisati

$$d\mathcal{G}_2 = -\mathcal{G}_2 \left( \frac{dD}{D} + \frac{ds}{s} \right) \quad (10)$$

Uzimajući u obzir medjuzavisnost deformacije trećeg i prvog reda

$$\varphi = \ln(1 + \varepsilon)$$

a za male vrijednosti  $\varepsilon$

$$\varphi \approx \varepsilon$$

tj.

$$d\varphi = d\varepsilon$$

dolazi se do zaključka da je

$$\frac{dD}{D} = d\varphi_1 \quad (11)$$

$$\frac{ds}{s} = d\varphi_3 \quad (12)$$

Tako da priraštaj  $d\mathcal{G}_2$  može biti izražen preko priraštaja logaritamskih deformacija

$$d\mathcal{G}_2 = -\mathcal{G}_2 (d\varphi_1 + d\varphi_3) \quad (13)$$

Analogno

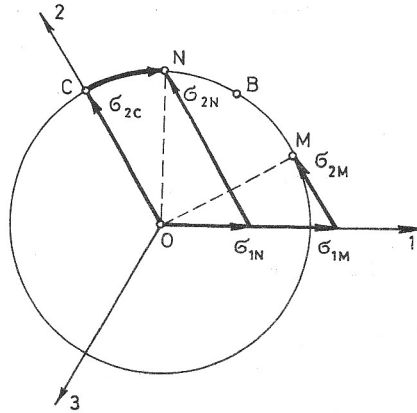
$$d\mathcal{G}_1 = -\mathcal{G}_1 (d\varphi_1 + d\varphi_3) \quad (14)$$

Ilustraciju odnosa u zakonu plastičnog tečenja za dvoosno naponsko stanje prikazuje sl.6.

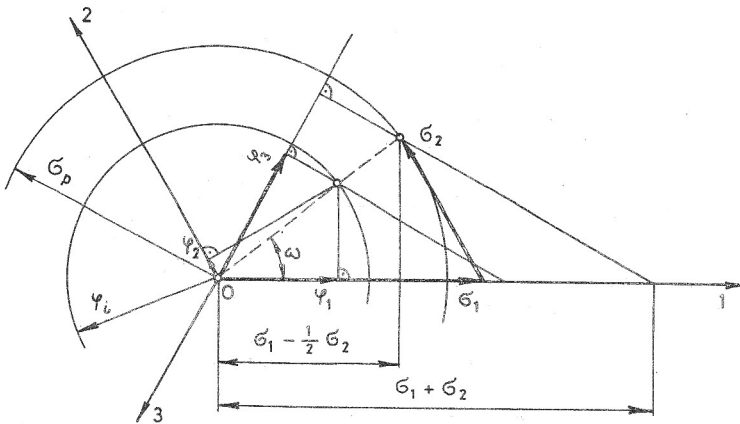
Iz zakona plastičnog tečenja za dvoosno naponsko stanje proizilazi da odnos priraštaja dotične deformacije prema priraštaju intenzivnosti deformacije može biti izražen u funkciji pokazatelja deformacione sheme  $\omega$ , pri čemu su vrijednosti za glavne napone izražene preko polarnih koordinata /4/.

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_p \left( \cos \omega + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \omega \right) \quad (15)$$

$$\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_p \cdot \sin \omega \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (16)$$



Sl.5. Proces razvlačenja cilindričnih elemenata na krugu plastičnosti



Sl.6. Ilustracija odnosa u zakonu plastičnog tečenja za dvoosno naponsko stanje

Znači

$$d\varphi_1 = \cos \omega d\varphi_i \quad (17)$$

$$d\varphi_3 = - \left( \frac{1}{2} \cos \omega + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega \right) d\varphi_i \quad (18)$$

Uslov plastičnog tečenja za dvoosno naponsko stanje po Huberovoj hipotezi

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_p^2 \quad (19)$$

gdje je  $\sigma_p$  granica plastičnosti materijala elementa pri jednoosnom naponskom stanju.

S obzirom da očvršćavanje materijala izaziva porast granice plastičnosti, o tome da li će doći do gubitka stabilnosti odlučuju priraštaji lijeve i desne strane uslova plastičnog tečenja, izraženi u razmatranom slučaju jednačinom (19). Ako priraštaj lijeve strane jednačine (19) bude veći od priraštaja desne strane te jednačine, doći će do gubitka stabilnosti, a to znači da se za razmatrano naponsko stanje opšti uslov stabilnosti može napisati u obliku

$$d(\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) \leq d(\sigma_p^2)$$

a nakon diferenciranja biće

$$(2\sigma_1 - \sigma_2)d\sigma_1 + (2\sigma_2 - \sigma_1)d\sigma_2 \leq 2\sigma_p d\sigma_p \quad (20)$$

Zamjenom  $d\sigma_2$  i  $d\sigma_1$  u jednačini (20) sa vrijednostima iz jednačina (13) i (14) dobija se

$$-(\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)(d\varphi_1 + d\varphi_3) \leq \sigma_p d\sigma_p \quad (21)$$

Unoseći u jednačinu (21) vrijednosti za  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  iz jednačina (15) i (16), a vrijednosti priraštaja deformacija iz jednačina (17) i (18), možemo napisati nakon sredjivanja

$$-\frac{1}{2} \cos \omega + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega \leq \frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} \quad (22)$$

Vrijednost lijeve strane nejednakosti (22) koju ćemo

Označiti sa  $x$  zavisi jedino od pokazatelja deformacione sheme  $\omega$ , tako da su u tabeli 1. prikazane vrijednosti  $x$  u zavisnosti od  $\omega$ .

T a b e l a 1.

$\omega/o/$	30	40	50	60	70	80
$x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766
$\omega/o/$	90	100	110	120	130	140
$x$	0,866	0,941	0,985	1	0,985	0,941
$\omega/o/$	150	160	170	180		
$x$	0,866	0,766	0,643	0,5		

Granični slučaj nejednakosti (22) je

$$x = \frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} = f(\omega) \quad (23)$$

Koristeći vrijednosti iz tabele 1. može se grafički prikazati ova funkcija (23), što je i učinjeno na sl.7., gdje linija "b" označava tu funkciju.

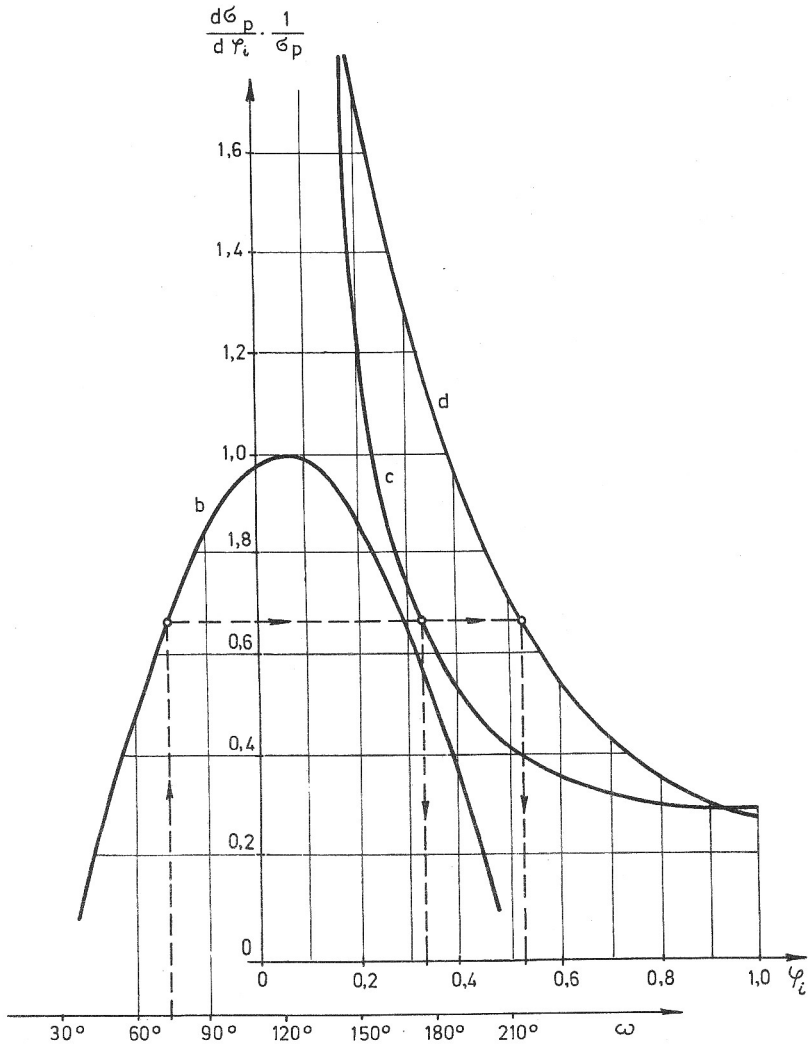
U cilju sagledavanja u oktaedarskoj ravni uslova stabilnosti neophodno je prethodno odrediti pomoću krivih očvršćavanja funkciju

$$\frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} = f(\varphi_i) \quad (24)$$

Izvršeni eksperimenti pokazuju da za meki žareni čelik sastava 0,03 % C i 0,17 % Mn funkcija (24) dobija oblik krive označene na sl.7 sa "c", a za žareni mesing sastava 63,3 % Cu i 36,7 % Zn sa "d".

Na taj način je, preko vrijednosti  $\frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p}$





Sl.7. Zavisnost  $\varphi_i$  od  $\omega$  za aksijalno meridijansko zatezanje

postignuto povezivanje pokazatelja deformacione sheme  $\omega$  i intenzivnosti deformacije  $\varphi_i$ , tj. dobija se funkcija

$$\varphi_i = f(\omega) \quad (25)$$

Vrijednosti ove funkcije su prikazane grafički na sl.9. Za meki žareni čelik to je linija b-c, a za žareni mesing b-d.

### 3. Stabilnost procesa razvlačenja cilindrične posude unutrašnjim pritiskom

Proces je shematski prikazan na sl.3. Polazeći od druge jednačine ravnoteže za tankozidne elemente

$$\frac{\sigma_1}{s_1} + \frac{\sigma_2}{s_2} = \frac{p}{s}$$

može se konstatovati da za razmatrani proces glavni naponi su definisani preko: pritiska, debljine zida i poluprečnika krivine, tj.

$$\sigma_1 = \frac{p \cdot R_2}{2 s} \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$2 = \frac{p \cdot R_2}{2 s}$$

S obzirom da je za cilindar  $R_1 = \infty$ , a  $R_2 = \frac{D}{2}$  biće

$$\sigma_1 = \frac{p D}{2 s} \quad (26)$$

$$\sigma_2 = \frac{p D}{4 s} \quad (27)$$

A to znači da na krugu plastičnosti (sl.5) ovaj proces predstavlja tačka M.

Analogno problemu razmatranom u prethodnoj tački imamo da je

$$d\sigma_1 = \frac{p D}{2 s} \left( \frac{dD}{D} - \frac{ds}{s} \right) \quad (28)$$

$$d\sigma_2 = \frac{p D}{4 s} \left( \frac{dD}{D} - \frac{ds}{s} \right) \quad (29)$$

tj.

$$d\epsilon_1 = \epsilon_1 (d\varphi_1 - d\varphi_3) \quad (30)$$

$$d\epsilon_2 = \epsilon_2 (d\varphi_1 - d\varphi_3) \quad (31)$$

Opšti uslov stabilnosti za dvoosno naponsko stanje je

$$d(\epsilon_1^2 - \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2^2) \leq d(\epsilon_p^2) \quad (32)$$

nakon diferenciranja

$$(2\epsilon_1 - \epsilon_2) d\epsilon_1 + (2\epsilon_2 - \epsilon_1) d\epsilon_2 \leq 2\epsilon_p d\epsilon_p \quad (33)$$

Zamjenom  $d\epsilon_1$  i  $d\epsilon_2$  njihovim vrijednostima u jednačinama (30) i (31) dobija se slijedeći oblik uslova stabilnosti

$$(\epsilon_1^2 - \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2^2) (d\varphi_1 - d\varphi_3) \leq \epsilon_p d\epsilon_p \quad (34)$$

Iz uslova proporcionalnosti naponskog devijatora komponenti priraštaja plastičnih deformacija proizilazi

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_i} = \frac{\epsilon_1 - \frac{1}{2}\epsilon_2}{\epsilon_p} \quad (35)$$

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_i} = -\frac{\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\epsilon_p} \quad (36)$$

tako da već prethodno definisane priraštaje deformacija  $d\varphi_1$  i  $d\varphi_3$  u obrascima (17) i (18) možemo zajedno sa vrijednostima  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$  iz obrazaca (15) i (16) unijeti u uslov stabilnosti (34) i nakon sredjivanja dobiti

$$\frac{3}{2} \cos \omega + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega \leq \frac{d\epsilon_p}{d\varphi_i} \cdot \frac{1}{\epsilon_p} \quad (37)$$

Vrijednosti lijeve strane nejednakosti (37) koju ćemo

označiti sa  $y$  zavisi jedino od pokazatelja deformacione sheme  $\omega$  tako da su u tabeli 2. prikazane te vrijednosti u zavisnoszi od  $\omega$ .

T a b e l a 2.

$\omega/^\circ/$	-60	-50	-40	-30	-20	-10	0
$y$	0	0,3012	0,592	0,866	1,135	1,327	1,5
$\omega/^\circ/$	10	20	30	40	50	60	
$y$	1,627	1,706	1,732	1,706	1,627	1,5	
$\omega/^\circ/$	70	80	90	100	110	120	
$y$	1,327	1,114	0,867	0,594	0,302	0	

Razmatrajući granični slučaj nejednakosti (37) biće

$$y = \frac{dG_p}{d\psi_i} \cdot \frac{1}{G_p} = f(\omega) \quad (38)$$

i koristeći vrijednosti iz tabele 2. može se grafički prikazati ova funkcija (38), što je i učinjeno na sl.8 gdje linija "a" označava tu funkciju.

Preko krivih očvršćavanja može se odrediti funkcija (24) koja je na osnovu izvršenih eksperimenata prikazana kao kriva označena na sl.8 sa "c" za meki žareni čelik sastava 0,03 % C i 0,17 % Mn, a sa "d" za žareni mesing sastava 63,3 % Cu i 36,7 % Zn.

Kao rezultat povezivanja funkcija (24) i (38) dobija se funkcija(25)

$$\psi_i = f(\omega)$$

Vrijednosti ove funkcije su prikazane grafički na sl.9. Za meki žareni čelik to je linija a-c, a za žareni mesing a-d. Aktivni dio ovih funkcija označen je kontinualnim linijama, kao dio linija a-c i a-d, a ostali dio ovih linija označen je isprekidano.



#### 4. Analiza rezultata

Funkcije prikazane na slikama 7 i 8 omogućavaju da se za svaku vrijednost ugla  $\omega$  odredi maksimalna vrijednost intenzivnosti deformacije  $\varphi_i$ , pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti tečenja materijala. To određivanje je posredno i ne daje jasan pregled zavisnosti položaja granice stabilnosti od pokazatelja deformacione sheme.

Prelaskom na funkcije prikazane u oktaedarskoj ravni sa polarnim koordinatama  $\varphi_i$  i  $\omega$  dobija se neposredna slika stanja tj. položaj granice stabilnosti je lako uočljiv i može biti istovremeno interpretiran. Veoma je pregledna u ovom sistemu razlika između položaja granice stabilnosti za opterećenje cilindričnog elementa aksijalnom silom i opterećenja cilindrične posude unutrašnjim pritiskom. Tako n.pr. za žareni meki čelik opterećen aksijalnom silom granica stabilnosti je linija b-c u aktivnom području  $90^\circ \leq \omega \leq 120^\circ$ , a za taj isti materijal opterećen unutrašnjim pritiskom granica stabilnosti je linija a-c u aktivnom području  $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ . Granice stabilnosti za žareni meki čelik u aktivnom području su konveksne linije u odnosu na centar sistema, a za žareni mesing konkavne linije.

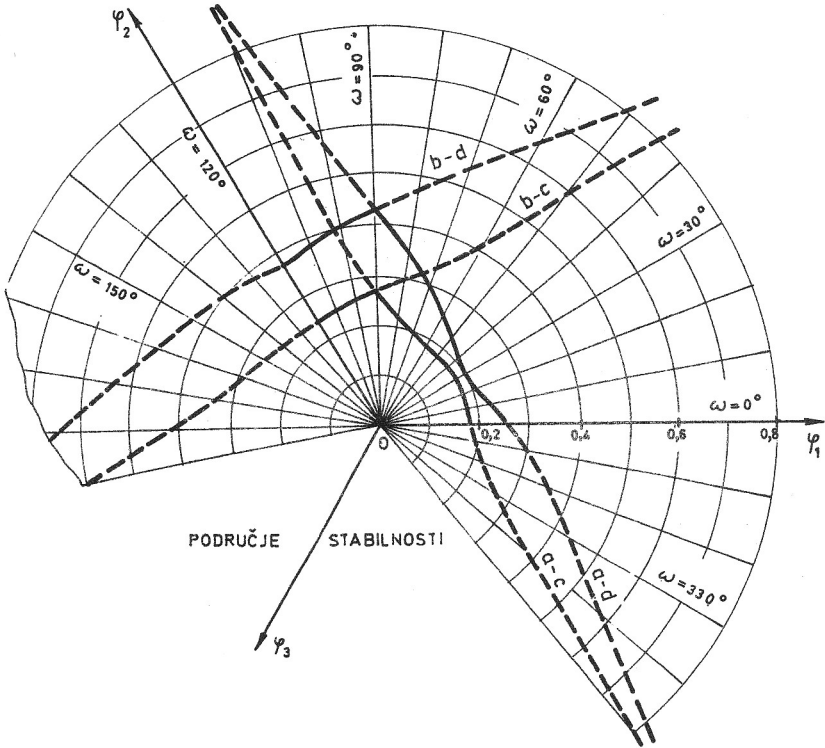
Najmanje razlike u položaju granice stabilnosti za razmatrana dva materijala su

- u procesu jednoosnog (meridijanskog) zatezanja pri vrijednosti pokazatelja deformacione sheme  $\omega = 120^\circ$ ,
- u procesu razvlačenja unutrašnjim pritiskom pri vrijednosti pokazatelja deformacione sheme  $\omega = 30^\circ$ .

Dalje se uočava da je najveća udaljenost, i to za oba razmatrana materijala, granice stabilnosti procesa od početne vrijednosti intenzivnosti deformacije pri  $\omega = 90^\circ$ .

U slučaju kombinovanog opterećenja, tj. istovremenog zatezanja cilindrične posude unutrašnjim pritiskom i aksijalnom silom dobila bi se ista slika granice stabilnosti koja je dobijena preko komponentnih opterećenja.

Opterećenje cilindričnog elementa unutrašnjim pritiskom (sl.4) vodi ka njegovom ispupčavanju pri čemu dolazi do smanjenja



Sl.9. Granica stabilnosti procesa razvlačenja cilindričnih tankozidnih elemenata

debljine zida, porasta prečnika i dužine meridijana, što znači da je proces lociran na krugu plastičnosti između tačke "M" i tačke "B".

### 5. Zaključak

Odredjivanje položaja granice gubitka stabilnosti u procesima razvlačenja cilindričnih elemenata u području plastičnosti može se postići kroz:

- identifikaciju opterećenja,
- korišćenje zakona plastičnosti i uslova plastičnog tečenja,
- polarnih koordinata u kosougloj koordinatnom sistemu,
- krivih očvršćavanja za dotične materijale.

Na osnovu dobijenih rezultata, prikazanih u troosnom deformacionom sistemu u oktaedarskoj ravni, može se zaključiti da položaj granice stabilnosti zavisi od dva osnovna parametra:

- pokazatelja deformacione sheme  $\omega$ ,
- unutrašnje strukture obratka, koja dolazi do izražaja u fenomenu hladnog očvršćavanja.

Najmanja mogućnost procesa, što znači najbliži položaj granice gubitka stabilnosti od početnog položaja procesa, tj. najmanja intenzivnost deformacije  $\varphi_i$ , pojavljuje se pri  $\omega = 30^\circ$ . Međutim najveće mogućnosti su za  $\omega = 90^\circ$ , kada dolazi do kočenja procesa sužavanja zatezanog cilindričnog elementa.

Najbitniji zaključak je da rezultati razmatranja procesa razvlačenja cilindričnih tankozidnih elemenata u plastičnom stanju dokazuju da na osnovu položaja granice stabilnosti može se odrediti stepen pouzdanosti tehnološkog procesa, a samim tim omogućiti pravilan tok tog procesa.

### L i t e r a t u r a

- /1/ NADAI A., Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, 1950.
- /2/ MARCINIAK Z., Mechanika procesów tloczenia blach, Warszawa, 1961.



- /3/ KAČANOV L.M., Osnovi teoriji plastičnosti, Moskva, 1969.
- /4/ ŽIVANOVIĆ S., Analiza procesa razvlačenja na bazi bezmomentne teorije ljuske, Banjaluka, 1976.
- /5/ ŽIVANOVIĆ S., Uopštena analiza napona u procesima oblikovanja tankozidnih elemenata, časopis Obrada deformisanjem u mašinstvu, br.3., Niš, 1977.

ŽIVANOVIĆ M.S.

PRILOG ISTRAŽIVANJU STABILNOSTI PROCESA  
RAZVLAČENJA CILINDRIČNIH TANKOZIDNIH  
ELEMENATA U PLASTIČNOM STANJU

R e z i m e

U radu se razmatra metoda odredjivanja granice stabilnosti za područje razvlačenja cilindričnih tankozidnih elemenata u plastičnom stanju. Rezultati istraživanja pokazuju da položaj granice stabilnosti zavisi od pokazatelja deformacione sheme i unutrašnje strukture materijala, koja dolazi do izražaja u fenomenu hladnog očvršćavanja.

DIE BEILAGE DES UNTERSUCHENS DER STABILITÄT  
DES AUSDEHNUNGSPROZESSES DER ZYLINDRISCHEN  
DÜNNWANDIGEN ELEMENTEN IM PLASTISCHE ZUSTAND

Z u s a m m e n f a s s u n g

In der Arbeit wird man die Bestimmungsmethode der Stabilitätsgrenze für den Bereich die Ausdehnung der zylindrischen dünnwandigen Elementen im plastische Zustand erklärt. Die Untersuchungsergebnissen vorzeigen dass die Lage der Stabilitätsgrenze abhängt von des Index des Verformungsschema und der Innenstruktur des Werkstoffes, die kommt bis den Ausdruck im Phänomen der Kaltaushärtung.